UNIVERSITE PAUL SABATIER
TOULOUSE III

L3 Parcours Physique et Application à l'Energie
EL5PPAB1

Année
2011/2012

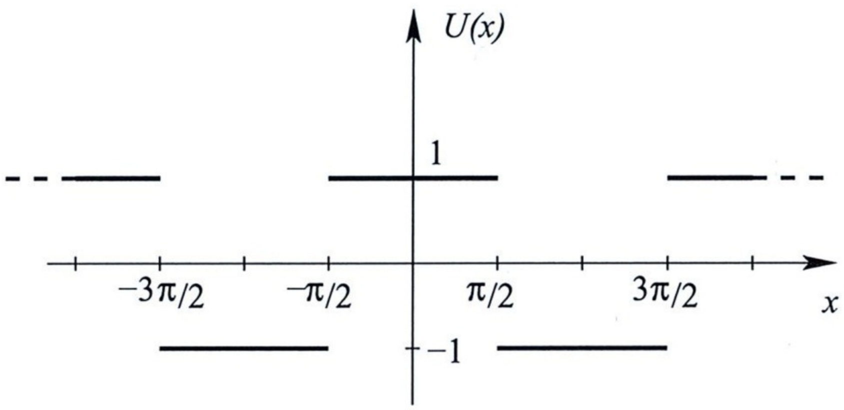
TD 4 – DISTRIBUTIONS

I – Soit f une fonction de R dans R continue et dérivable partout sauf en a où f présente une discontinuité.

1. Calculer sa dérivée f' au sens des distributions en supposant que $\lim_{x\to a-} f'(x) = \lim_{x\to a+} f'(x)$.
2. Que se passe-t-il si l'on supprime cette dernière hypothèse ?

II – Soit α une fonction indéfiniment dérivable de R dans R et T une distribution.

1. Montrer qu'au sens des distributions, $(\alpha T)' = \alpha' T + \alpha T'$.
2. En déduire la dérivée, au sens des distributions, de la fonction $x \to |\cos x|$, en utilisant la distribution U :



III - Réponse impulsionnelle d'un oscillateur amorti.

1. Trouver l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$f'' + 2f' + f = 0. \qquad (1)$$

2. On s'intéresse à l'équation

$$T'' + 2T' + T = \delta + \delta', \qquad (2)$$

où T peut maintenant être une distribution, et où δ et δ' sont la distribution de Dirac et sa dérivée. On cherche une solution de (2) sous la forme $T(x) = f(x)H(x)$ où f est une fonction de la variable réelle et H la distribution de Heaviside. Pourquoi cette forme a priori ? Que doit vérifier f ? En déduire une solution de (2).

IV – Dériver au sens des distributions, la fonction :

$$f(x) = \Pi(x)\sin(\pi x) \text{ avec } \Pi(x) = \begin{cases} 1, & \forall |x| \le \frac{1}{2} \\ 0, & \forall |x| > \frac{1}{2} \end{cases}.$$